	LYCEE PILOTE DE SOUSSE	Devoir de synthèse N°1	CLASSE : 3ème Math
	LE 4 / 12 / 2006	MATHEMATIQUES	DUREE : 2 heures

EXERCICE :1 (9 points)

Soit m un paramètre réel et soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{x^2 + x - 2} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-2} - 2}{3x - 6} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + mx & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/ Déterminer le domaine de définition D de f.

2/ a) Déterminer les limites éventuelles suivantes : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x)$

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3/ Justifier que f est continue en 1.

4/ Déterminer la valeur de m pour laquelle f est continue en 2.

5/ Pour la valeur de m trouvée au 4/ :

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite Δ d'équation : $y = \frac{9}{8}x$ est une asymptote oblique de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$, puis étudier la position relative de la courbe (C) et la droite Δ sur $[2, +\infty[$.

EXERCICE :2 (5 points)

Le plan P est orienté dans le sens direct.

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A et tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{21\pi}{4} \ (2\pi)$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

1/ Tracer le triangle ABC et déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

2/ Soit $\Gamma = \left\{ M \in P \,/\, (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv -\frac{\pi}{8} \ (\pi) \right\}$. Prouver que $\Gamma = (\mathcal{C}) \setminus \{A, B\}$.

3/ Soit N un point de Γ, la perpendiculaire à la droite (AN) issue de C coupe la droite (BN) en Q.

a) Montrer que : $(\widehat{\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NA}}) + \frac{\pi}{2} \ (\pi)$.

b) En déduire que lorsque N varie sur Γ, le point Q varie sur une ligne fixe Γ'que l'on précisera. Construire Γ'.

EXERCICE :3 (7 points)

Le plan P est orienté dans le sens direct.

Soit OAB un triangle quelconque et soit I le pied de sa hauteur issue de O. On considère une droite variable Δ passant par O et on désigne par M et N les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur Δ.

1/ Montrer que lorsque Δ varie, le point M se déplace sur un cercle fixe (C_1) et le point N sur un cercle fixe (C_2) que l'on précisera , tracer (C_1) et (C_2).

2/ On suppose que Δ est distincte de (OI). Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}) \ (\pi)$.

3/ Soit K le projeté orthogonal de B sur la droite (OA). Donner une mesure de $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IK})$.

4/ On suppose que Δ est aussi distincte de (OA).Les droites (AM) et (KN) se coupent en R.

a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NK}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OK}}) \ (\pi)$

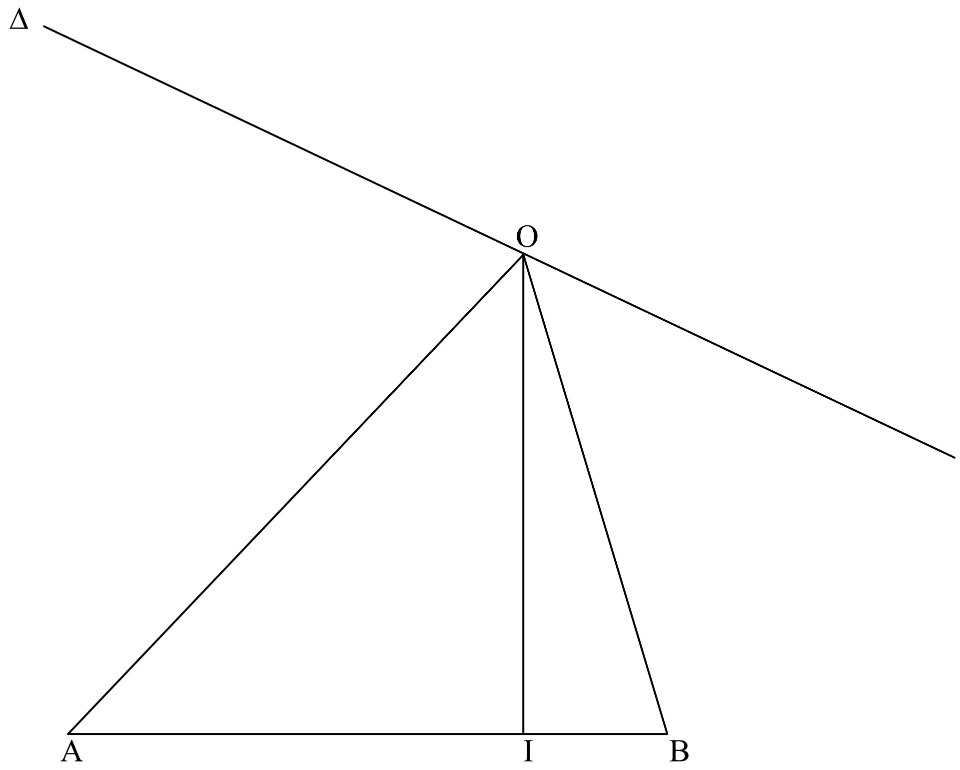
b) En déduire que R appartient au cercle (C_3) circonscrit au triangle AKI.

c) Montrer que les droites (IR) et (IN) sont perpendiculaires.

5/ Soit N' le point diamétralement opposé à N sur (C_2) et R' le point diamétralement opposé à R sur (C_3).

a) Montrer que les points K, N' et R' sont alignés.

b) En déduire que les droites (NN') et (RR') sont perpendiculaires.


Δ
O
A
I
B